



С.Н. Зиненко

Математический анализ

Дифференцирование функций одной переменной

(сборник задач)

2015

6. Производная и дифференциал функции

Найти производные и дифференциалы функций	
№ 6.1. $y = 3 \sin x + 5$, $y = \sin(3x + 5)$	№ 6.1. $y = 7 \cos x - 4$, $y = \cos(7x - 4)$
№ 6.2. $y = 4 \arcsin(-2x) - 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$	№ 6.2. $y = 6 \arccos \frac{x}{3} + 9 \operatorname{arctg}(-4x)$
№ 6.3. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$, $y = 4 \sqrt[5]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[7]{x^2}}$	№ 6.3. $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$, $y = 7 \sqrt[3]{x^8} + \frac{4}{\sqrt[9]{x^5}}$
№ 6.4. $y = e^x \cdot \cos x$, $y = \ln 3x \cdot \operatorname{ctg} 4x$	№ 6.4. $y = \ln x \cdot \operatorname{tg} x$, $y = e^{-2x} \cdot \sin 3x$
№ 6.5. $y = \frac{\ln x}{\sin x}$, $y = \frac{e^{-3x}}{\cos 5x}$	№ 6.5. $y = \frac{e^x}{\cos x}$, $y = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\sin(-4x)}$
№ 6.6. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$, $y = \sin \frac{x}{3} \cdot \operatorname{sh} 3x$	№ 6.6. $y = \sin x \cdot \operatorname{sh} x$, $y = \cos 7x \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{5}$
№ 6.7. $y = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$, $y = \frac{\cos 5x}{\operatorname{ch}(-2x)}$	№ 6.7. $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\cos x}$, $y = \frac{\operatorname{sh} 6x}{\sin(-5x)}$
№ 6.8. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $y = \operatorname{arsh} x$	№ 6.8. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $y = \operatorname{arch} x$
№ 6.9. $y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $y = \operatorname{arth} x$	№ 6.9. $y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $y = \operatorname{arcth} x$
№ 6.10. $y = \ln(\cos(\operatorname{tg}(3x)))$, $y = \sqrt[3]{\sin(\operatorname{arctg}(\frac{1}{x^4}))}$	№ 6.10. $y = \operatorname{tg}(\sin(\ln(7x+3)))$, $y = \sqrt[5]{\cos(\operatorname{tg}(\arcsin(\frac{2}{x^3})))}$
№ 6.11. $y = (\cos x)^{\sin x}$	№ 6.11. $y = \operatorname{ch}(x^{\operatorname{sh} x})$
№ 6.12. $y = \frac{\sqrt[3]{(x-3)^5} \sqrt[4]{(x-1)^7}}{\sqrt[5]{(x+1)^2}}$	№ 6.12. $y = \frac{\sqrt[7]{(x+3)^2}}{\sqrt[5]{(x-4)^3} \sqrt[9]{(x-1)^7}}$

7. Физический и геометрический смысл производной и дифференциала

№ 7.1. Найти скорость движения $v(t)$, если известно уравнение движения точки по оси $s(t) = A \sin \omega t$	№ 7.1. Найти ускорение движения $w(t)$, если известна скорость движения точки по оси $v(t) = A \omega \cos \omega t$
№ 7.2. Найти линейную плотность $\rho(x)$, если известно линейное распределение массы $m(x) = \arctg(x - a)$ отрезка $[a, b]$	№ 7.2. Найти теплоемкость тела $c(T)$, если известно количество тепла $Q(T) = T^3 + T^2 + T$ для нагревания тела от 0 до T градусов
№ 7.3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке x_0	
$y = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$	$y = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$
№ 7.4. Найти угол пересечения двух кривых	
$y = \sin x, \quad y = \cos x$	$y = x^\alpha, \quad y = \sqrt[\alpha]{x} \quad (\alpha > 0)$
№ 7.5. Написать уравнение касательной к неявно заданной кривой в точке (x_0, y_0)	
эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
№ 7.6. Показать, что семейства кривых образуют ортогональную сетку (т.е. любые две кривые из различных семейств пересекаются под прямым углом)	
гипербол $xy = a, \quad x^2 - y^2 = b$	парабол $y^2 = 4a(a - x), \quad y^2 = 4b(b + x)$
№ 7.7. Написать уравнения движения материальной точки. По какой траектории продолжит движение точка с момента отрыва t_0 в отсутствии внешних сил?	
точка находится на ободе колеса радиуса a , катящегося без скольжения (циклоида)	точка брошена под углом α к горизонту с некоторой скоростью v (парабола)
№ 7.8. Дано уравнение движения точки $s(t)$. Для данного момента времени t найти точное значение приращения $\Delta s(t)$ и приближенное $\Delta s(t) \approx ds(t)$ при различных значениях Δt	
$s(t) = t^3, \quad t = 3, \quad a) \Delta t = 0.1; \quad b) \Delta t = 0.01$	$s(t) = t^4, \quad t = 2, \quad a) \Delta t = 0.1; \quad b) \Delta t = 0.01$
№ 7.9. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, найти приближенно значения	
$\sqrt[3]{1.1}, \quad \cos 61^\circ, \quad \arctg 1.01$	$\sqrt[4]{17}, \quad \sin 29^\circ, \quad \ln 1.01$

8. Производные и дифференциалы высших порядков

№ 8.1. Найти производные и дифференциалы $1^{\text{го}}, 2^{\text{го}}, 3^{\text{го}}$ порядков функции $y = f(x)$ при условии а) x - независимая переменная б) $x = x(\dots)$ - зависимая переменная	
$y = \sin x$	$y = \operatorname{arctg} x$
№ 8.2. Найти производные $1^{\text{го}}, 2^{\text{го}}$ порядков параметрически заданной функции	
$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$	$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$
№ 8.3. Найти производные $1^{\text{го}}, 2^{\text{го}}$ порядков неявно заданной функции	
$xy = \sin y$	$y = \cos(xy)$
№ 8.4. Показать, что функция имеет обратную и найти производную обратной функции	
$y = x^5 + x^3 + x$	$y = (x^2 + 2x + 3)e^x$
№ 8.5. Показать, что уравнение имеет и притом единственное решение при любом значении параметра a	
$x + \varepsilon \sin x = a \quad (0 < \varepsilon < 1)$	$x - \varepsilon \operatorname{arctg} x = a \quad (0 < \varepsilon < 1)$
Найти вид $n^{\text{ой}}$ производной функции	
№ 8.6. $y = \sin ax$	№ 8.6. $y = \cos ax$
№ 8.7. $y = \ln(ax + b)$	№ 8.7. $y = (ax + b)^\alpha$
Используя формулу Лейбница, найти $n^{\text{ю}}$ производную функции	
№ 8.8. $y = x \cdot \cos 2x \quad (n = 25)$	№ 8.8. $y = x^3 \cdot \sin 4x \quad (n = 15)$
№ 8.9. $y = x^2 \cdot e^{3x} \quad (n = 40)$	№ 8.9. $y = x^4 \cdot \operatorname{sh} 5x \quad (n = 30)$

9. Правило Лопиталья

Найти пределы, используя правило Лопиталья	
№ 9.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$	№ 9.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$
№ 9.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$	№ 9.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x - \operatorname{arctg} x}$
№ 9.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \arcsin 2x}{x^3}$	№ 9.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 2x}{x^3}$
№ 9.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\arcsin x^6}$	№ 9.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{\operatorname{arctg} x^5}$
№ 9.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$	№ 9.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$
№ 9.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$	№ 9.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} 2x}{\ln \operatorname{tg} x}$
№ 9.7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2} \ln(1-x)}$	№ 9.7. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-1) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}$
№ 9.8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{4x-\pi}}$	№ 9.8. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{\sin x}}$
№ 9.9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$	№ 9.9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x}$
№ 9.10. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$	№ 9.10. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\operatorname{ctg} x)^{x-\pi}$
№ 9.11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \quad (\alpha > 0)$	№ 9.11. $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \cdot \sqrt[x]{e} \quad (\alpha > 0)$
№ 9.12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$	№ 9.12. $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \cdot \ln x \quad (\alpha > 0)$

10. Формула Тейлора

Найти пределы, используя формулу Тейлора	
№ 10.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$	№ 10.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - 1 + \ln \cos x}{x^4}$
№ 10.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{\ln(1+x^3)}$	№ 10.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \sin x - x^2(1 - \frac{1}{2}x)}{\arcsin x^4}$
№ 10.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$	№ 10.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$
№ 10.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - (\cos x)^{\sin x}}{\arcsin x^3}$	№ 10.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\sin x}}{\operatorname{arctg} x^3}$
№ 10.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{\operatorname{tg} x^5}$	№ 10.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1 - \cos x) - \sqrt[8]{1-x^4}}{\sin x^6}$
№ 10.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}^3 (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$	№ 10.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$
№ 10.7. С помощью формулы Тейлора вычислить с точностью до 10^{-5}	
$\sin 1^\circ$, $\sqrt[3]{30}$	$\cos 5^\circ$, $1.1^{1.2}$

11. Графики функций в декартовых координатах

Построить графики функций в декартовых координатах	
№ 11.1. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$	№ 11.1. $y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 6}$
№ 11.2. $y = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$	№ 11.2. $y = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$
№ 11.3. $y = \cos x - \frac{1}{4}\cos 4x$	№ 11.3. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$

12. Параметрически заданные кривые

Построить кривые, заданные в параметрической форме	
№ 12.1. $x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t-1}$	№ 12.1. $x = \frac{t}{t+1}, \quad y = \frac{t^2}{t+1}$
№ 12.2. $x = t \ln t, \quad y = \frac{\ln t}{t}$	№ 12.2. $x = t e^t, \quad y = t e^{-t}$
№ 12.3. $x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$	№ 12.3. $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$

13. Кривые в полярной системе координат

Построить графики функций, заданных в полярной системе координат	
№ 13.1. $r = \varphi$	№ 13.1. a) $r = \varphi^2$, b) $r = \varphi^3$
№ 13.2. $r = e^\varphi$	№ 13.2. $r = \ln \varphi$
№ 13.3. a) $r = a \sin 3\varphi$, b) $r = a \sin \pi \varphi$	№ 13.3. a) $r = a \cos 4\varphi$ b) $r = a(2 + \cos 4\varphi)$
№ 13.4. $r = \frac{1}{\varphi}$	№ 13.4. a) $r = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$, b) $r = \frac{1}{\varphi^2}$
№ 13.5. $r = a(1 + \cos \varphi)$	№ 13.5. a) $r = a(2 + \cos \varphi)$, b) $r = a(1 + 2 \cos \varphi)$
№ 13.6. a) $r = \operatorname{tg} \varphi$, b) $r = \operatorname{tg} 2\varphi$	№ 13.6. a) $r = 2a \cos \varphi$, b) $r = 2a \sin \varphi$

14. Комплексные числа

Выполнить арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме	
№ 14.1. $z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 3 + 4i$	№ 14.1. $z_1 = 4 + 3i, \quad z_2 = 2 - i$
Представив число в тригонометрической форме, найти $n^{\text{ю}}$ степень	
№ 14.2. $z = \sqrt{3} + i, \quad z^{20} = ?$	№ 14.2. $z = -1 + \sqrt{3}i, \quad z^{15} = ?$
Представив число в тригонометрической форме, найти корни $n^{\text{й}}$ степени и изобразить их геометрически	
№ 14.3. $z = 2 + i, \quad \sqrt{z} = ?$	№ 14.3. $z = 3 + 2i, \quad \sqrt{z} = ?$
№ 14.4. $z = -1 + 2i, \quad \sqrt[3]{z} = ?$	№ 14.4. $z = -2 + 3i, \quad \sqrt[3]{z} = ?$
№ 14.5. $z = -2 - i, \quad \sqrt[4]{z} = ?$	№ 14.5. $z = -3 - 2i, \quad \sqrt[4]{z} = ?$
Найти корни полиномов с вещественными коэффициентами. Разложить полиномы на простейшие комплексные и вещественные множители	
№ 14.6. $x^3 - 1$	№ 14.6. $x^3 + 1$
№ 14.7. $x^4 + 1$	№ 14.7. $x^4 - 1$
№ 14.8. $x^4 - x^2 + 1$	№ 14.8. $x^4 + x^2 + 1$
№ 14.9. $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$	№ 14.9. $x^3 + x^2 + 3x - 5$

15. Элементарные функции комплексного переменного

Найти	
№ 15.1. $e^{i\pi}$	№ 15.1. $e^{i\frac{\pi}{2}}$
№ 15.2. e^{5-2i}	№ 15.2. e^{4+3i}
№ 15.3. $\cos(-3+2i)$	№ 15.3. $\sin(5-3i)$
№ 15.4. $\operatorname{sh} i$	№ 15.4. $\operatorname{ch} i$
Выяснить геометрический смысл соотношений	
№ 15.5. $ z - z_0 < R$	№ 15.5. $ z - z_0 > R$
№ 15.6. $ z - c + z + c = 2a$	№ 15.6. $ z - c - z + c = 2a$
Во что преобразуется при отображении $w = f(z)$ прямоугольная сетка $x = \operatorname{const}$, $y = \operatorname{const}$	
№ 15.7. $w = e^z$	№ 15.7. $w = e^{iz}$
№ 15.8. $w = \cos z$	№ 15.8. $w = \operatorname{ch} z$